RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

SEMANA 3
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS -PROPORCIONES Y PORCENTAJES

Semana 3: Resolución de problemas -proporciones y porcentajes

CFT ENAC ONLINE 2022

Equipo de Diseño: eTiza

Autor: Juan Carlos Escares

Orientaciones Instruccionales: ADI ENAC

Tabla de contenidos

Introducción 4
Recorrido por los aprendizajes de la semana 6
Contenidos de la semana 7
Comentarios finales 18
Referencias bibliográficas 19
Solucionario 20

Introducción

Esta semana comenzamos la Unidad 2, donde veremos el cálculo de proporciones y porcentajes y, posteriormente, el análisis e interpretación de gráficos.

Es importante destacar que, en nuestra vida diaria, siempre estamos usando las proporciones y particularmente los porcentajes, aunque no nos demos cuenta. Por ejemplo:

a) En muchos envases de alimentos la etiqueta nutricional muestra los aportes por cada 100 gramos y por una porción, esto corresponde a una proporción.
b) Los valores de IPC, crecimiento de población, ganancia o intereses en bancos e incluso la ponderación de cada una de sus notas contiene un porcentaje.

A continuación, veremos algunas definiciones y ejemplos de proporción y porcentajes. Finalmente le proponemos una serie de ejercicios que debe desarrollar para comprobar lo aprendido.

Competencia sello

- Comunicar situaciones cotidianas utilizando proporciones y porcentajes
- Comunicar situaciones cotidianas utilizando gráficos
- Resolver problemas que impliquen el uso de números racionales

Aprendizajes esperados de la semana

- Infiere la necesidad de calcular la parte o el total en una proporcionalidad directa
- Calcula una proporción directa
- Calcula un porcentaje
- Ejemplifica el uso de proporciones en la vida cotidiana
- Ejemplifica el uso de porcentajes en la vida cotidiana

Ideas y palabras clave

- Comparación de magnitudes
- Porcentajes
- Igualdad de razones

Conviene preguntarse

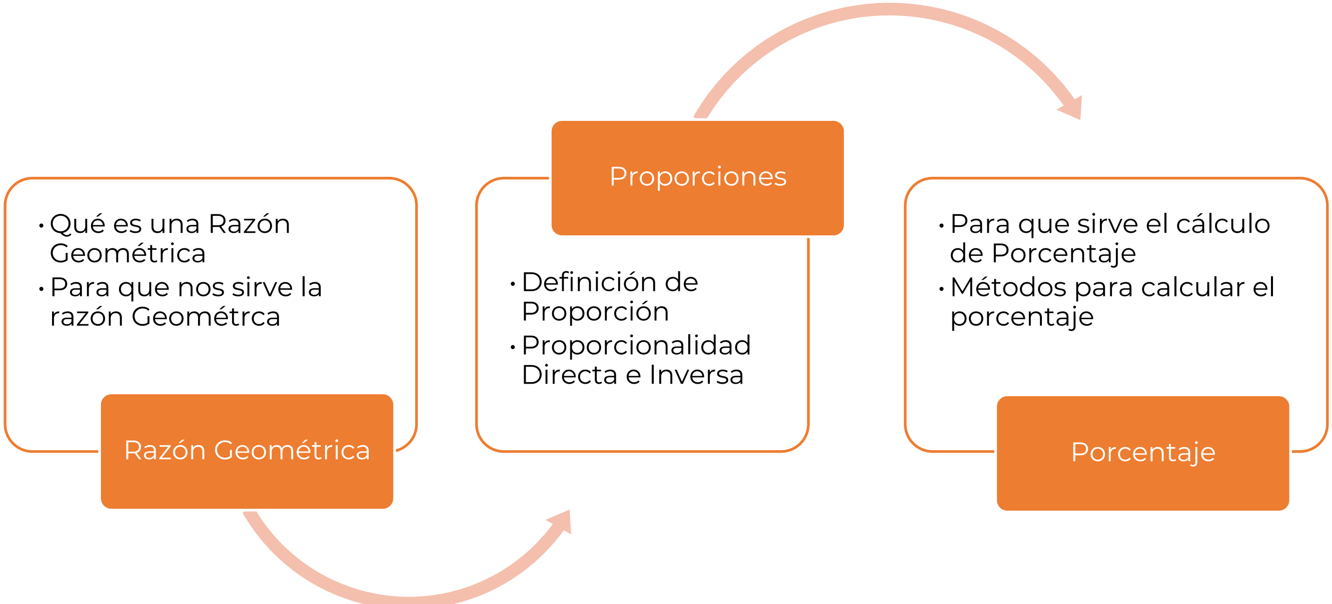
Antes de empezar, tome 1 minuto y piense en todos los momentos de su vida donde recuerde haber utilizado matemáticas.

Analice los siguientes planes de telefonía que ofrece una compañía.

Figura 1 Situaciones diarias donde se utilizan conceptos matemáticos

- ¿Podría calcular el aumento porcentual en el precio de cada plan?
- ¿Se puede obtener el precio real de cada plan una vez transcurridos los primeros 12 meses?

Recorrido por los aprendizajes de la semana



Contenidos de la semana

Razón Geométrica

En matemáticas una razón es la comparación de dos cantidades, por medio de la división o cociente. La razón entre a y b, cuando b es un número distinto de cero, se escribe:

$\frac{a}{b}$ o a: b   se lee "a es a b"

Por ejemplo, la razón entre 6 y 5 se escribe:

$\frac{6}{5}$ o 6 : 5 se lee "6 es a 5"

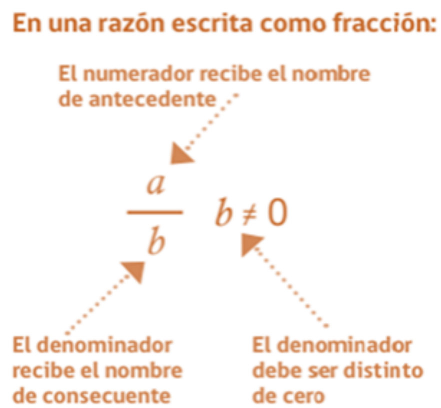


Figura 2: escritura de una razón

Cuando queremos establecer una comparación entre dos cantidades utilizamos una razón o cuando queremos explicar la relación entre ellas.

Calcular una razón, significa determinar el valor de ésta, el que se establece haciendo la división entre el antecedente y el consecuente.

Reglas a considerar

Regla	Ejemplo
Cuando el antecedente es mayor que el consecuente, su razón es mayor que 1.	Por ejemplo, la razón entre 8 y 4 es 2: Lo que indica que 8 es 2 veces 4.
Cuando el antecedente es menor que el consecuente, su razón es menor que 1.	Por ejemplo, la razón entre 4 y 6 es 0,66: Lo que indica que 4 es 0,66 veces 6

Consulte la Biblioteca Digital: Revisar las páginas 264 y 265 del libro "Matemática: Razonamiento y Aplicaciones".

Proporción

Como ya sabemos que una razón es una comparación entre dos cantidades, una proporción es la igualdad de dos razones. Es decir, la razón de igualdad, constante, entre dos magnitudes a medir.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{ó} \quad \underbrace{a : \overbrace{b = c}^{\text{Términos medios}} : d}_{\text{Términos extremos}}$$

Constante de Proporcionalidad

Se denomina Constante de Proporcionalidad (k) al resultado de la división de las razones, el cual es el mismo para cada una de ellas en una proporción.

Una proporción radica en la dependencia de los valores de dos magnitudes y dependiendo de eso será Directa o Inversa.

Consulte la Biblioteca Digital: Revisar las páginas 266 a 269 del libro "Matemática: Razonamiento y Aplicaciones"

Teorema fundamental de las proporciones

En toda proporción, el producto de los términos medios es igual al producto de los términos extremos. Es decir

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ entonces } a \bullet d = b \bullet c$$

¿Para qué nos sirve este teorema? Para garantizar que las cantidades son proporcionales. Lo que vale decir que es una proporción.

Por ejemplo:

Las cantidades $\frac{15}{6} = \frac{10}{4}$ son una proporción? Para verificar aplicamos el teorema fundamental de las proporciones:

$$\frac{15}{6} \quad \frac{10}{4} \text{ entonces } 15 * 4 = 10 * 6 \quad \Rightarrow \quad 60 = 60$$

En consecuencia, ambas cantidades, $\frac{15}{6} = \frac{10}{4}$, son una proporción.

Proporcionalidad

En la práctica, a menudo nos enfrentamos a situaciones en las que el valor o la cantidad de una variable depende del valor de otra.

Proporción Directa

Cuando dos cantidades se relacionan de manera que el valor de una se obtiene multiplicando el valor correspondiente de la otra por el mismo número, se llama Proporción Directa. Una razón es directa si el aumento en el valor de uno hace que el otro aumente, o si una disminución en el valor de uno hace que el otro disminuya.

En una Proporcionalidad Directa dos cantidades cualesquiera de una magnitud y sus correspondientes en la otra forman una proporción.

El cociente entre dos magnitudes directamente proporcionales es siempre constante.

$$\frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \frac{12}{4} = \frac{15}{5} = 3$$

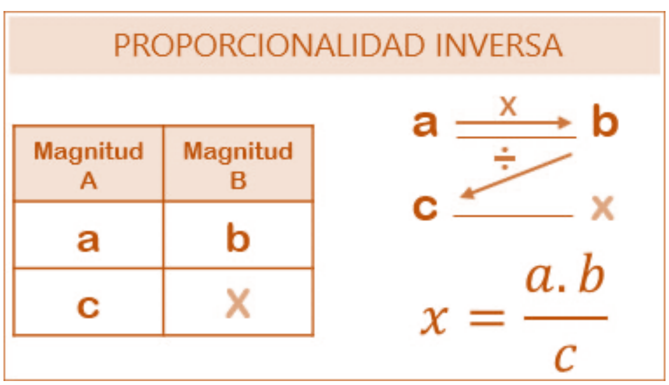
Por ejemplo:

Si un kilo de manzanas tiene un valor de $ 1500, a más kilos mayor será el monto a pagar.

Kilos	Precio por kilo
1	$1.500
2	$3.000
3	$4.500

Proporción Inversa

Cuando nos encontramos con una Proporcionalidad Inversa, significa que, si los valores de una magnitud aumentan, los valores correspondientes en la otra magnitud disminuyen.



Por ejemplo:

Si un vehículo viaja a cierta velocidad de Santiago a Chillan y aumenta su velocidad, el tiempo que demora en llegar a su destino disminuye. Por otro lado, si disminuye su velocidad aumentará el tiempo en llegar a su destino.

Velocidad	Tiempo
40 km/h	10 horas
50 km/h	8 horas
80 km/h	5 horas

Cuando dos magnitudes están relacionadas de modo que los valores de una de ellas se obtienen multiplicando por un mismo número los recíprocos de los valores correspondientes de la otra magnitud, se dice que son inversamente proporcionales (ver Matemática. (s.f). Proporciones. **Ecured**. Recuperado de: www.ecured.cu/Proporciones_(Matemática) [agosto 2022].

Por ejemplo:

Necesitamos pintar una pared y contamos con 3 personas, que demoran 60 minutos en pintarla. Si aumentamos la cantidad de personas el tiempo ocupado en pintar la pared disminuirá. Es decir, a más personas menos tiempo. Por lo tanto, la proporcionalidad será inversa.

Número de personas	Tiempo que demoran en pintar la pared
3	60 minutos
6	30 minutos
12	15 minutos

Porcentajes

Un porcentaje es una cantidad expresada como una fracción de 100. A menudo se utiliza el signo porcentaje %, escrito inmediatamente después del número al que se refiere.

Por ejemplo: "cincuenta y tres por ciento" se representa mediante 53**%** y significa “cincuenta y tres de cada cien unidades”. También puede ser representado como 53/100. Podemos establecer dos formas para calcularlo:

FORMA 1: Aplicación directa

Para el cálculo del t% de una cantidad N

$$\frac{t}{100} \cdot N$$

FORMA 2: Utilizando proporciones

Se plantea una proporción asignando 100 % al total.

$$\frac{t\%}{x} = \frac{100\%}{N}$$

N: una cantidad cualquiera

El porcentaje se usa para comparar una magnitud con otra, expresándolas mediante porcentajes para usar 100 como denominador común.

Por ejemplo:

Si en una región hay 50.000 personas con influenza de un total de 1 millón de habitantes, y en otra hay 150.000 enfermos de un total de 2 millones de personas, resulta más claro expresar que en el primer país hay un 5% de personas contagiadas, y en el segundo hay un 7,5%, resultando una proporción mayor en la segunda región.

Cómo obtener un tanto por ciento de un número

1. Para obtener el tanto por ciento de un número, simplemente se puede multiplicar el número por el valor que representa el porcentaje.

Por ejemplo:

$$15\% = \frac{15}{100} = \mathbf{0{,}15}$$

Entonces, para calcular el 15% de una cifra basta con multiplicar dicha cifra por 0,15:

El **15 %** de **300** es **300*0,15 = 45**

2. Alternativamente, se puede construir una regla de tres simple-directa.

Regla de tres simple

$$\left.\begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & b \\ c & \longrightarrow & x \end{array}\right| \longrightarrow x = \frac{b \cdot c}{a}$$

Así, para calcular el 25 % de 150 se hace la regla de tres: simplemente se multiplica cruzado y se divide ese resultado por el número que queda solo.

$$\left.\begin{array}{ccc} 100\% & \longrightarrow & 150 \\ 25\% & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \rightarrow \quad x = \frac{150 \cdot 25\%}{100\%} = 37,5$$

Por tanto: 37,5 es el 25 % de 150.

Consulte la Biblioteca Digital: Revisar los ejercicios de la página 232 del libro “Matemática: Razonamiento y Aplicaciones”

Aplicando lo aprendido

Actividad 1 de aplicación

Una mesa para 8 personas mide 2,5 metros y una mesa para 6 personas mide 1,8 metros. ¿Cuál es la razón entre ambas mesas? ¿Qué indica esa razón?

Debemos establecer la razón entre la mesa grande y la mesa pequeña, por tanto, nos están preguntando la razón entre 2,5 y 1,8, por lo que el primer número es 2,5, que corresponde al antecedente y 1,8 es el segundo número que se denomina consecuente:

Esa razón nos indica que la mesa grande es 1,55 veces el tamaño de la mesa pequeña.

En este problema, se puede observar que la Razón no es una Fracción, ya que en una fracción el numerador y el denominador deben ser números enteros, pero en una razón pueden ser números decimales.

Actividad 2 de aplicación

Supongamos que dos hermanas van al patio de comidas de un mall y pagan la cuenta de $ 18.600 en la razón 3:5 ¿Cuánto pagó cada uno?

Para calcular el monto, dividimos el total en 8 (3 + 5)

18.600 / 8 = $ 2325

La primera hermana pagó:

2.325 * 3 = $ 6.975

La segunda hermana:

2.325 * 5 = $ 11.625

Actividad 3 de aplicación

Un automóvil recorre 250 kilómetros con 20 litros de bencina. ¿cuántos kilómetros recorre con 35 litros de bencina?

Para resolver este problema, debemos determinar si se trata de una proporcionalidad directa o inversa.

Si aumenta la cantidad de litros de bencina debería aumentar la cantidad de kilómetros recorridos.

Si al duplicar una magnitud (litros) también se duplica la otra (kilómetros) estamos hablando de una proporcionalidad directa.

Por lo tanto, vamos a resolver el problema:

$\frac{\text{cms}}{\text{mts}} \quad \frac{20}{250} = \frac{35}{x}$

20*x = 250 * 35

X = $\frac{8750}{20}$ = 437,5

Solución: el automóvil recorre 437,5 kilómetros.

Actividad 4 de aplicación

Si 20 trabajadores siembran un campo en 4 días. ¿Cuánto tiempo tardarán 30 agricultores en sembrar el mismo campo?

Nuevamente debemos preguntarnos si se cumple una proporcionalidad directa o inversa.

Si en lugar de 20 trabajadores hablamos de 30 trabajadores, ¿tardarán más o menos tiempo en sembrar?

Mientras más trabajadores, menos tiempo para realizar el trabajo, por tanto, se trata de una proporcionalidad inversa.

Por lo tanto, vamos a resolver el problema:

trabajadores días

$\frac{20}{30} = \frac{4}{x}$

x= $\frac{20*4}{30}$ = 2,66

Solución: 30 trabajadores se demoran 2,66 días en sembrar el campo.

Actividad 5 de aplicación

Calcular el 12% de 950

Forma 1: Aplicación directa

$$\frac{12}{100} * 950 = 114$$

Forma 2: Utilizando regla de tres.

950 --> 100%

X --> 12%

X = $\frac{950*12}{100}$ = 114

Actividad 6 de aplicación

Calcular el 15 % del 20 % de 1.800 UF

Forma 1: Aplicación directa

$$\frac{15}{100} * \frac{20}{100} * 1800 = 54 \text{ UF}$$

Forma 2: Utilizando proporciones

$$\frac{1800}{100} = \frac{x}{20}$$

100 * x = 1800 * 20

X = 360

Luego se calcula el 30% del 20% de 1.200, es decir, 30% de 240.

$$\frac{360}{100} = \frac{x}{15}$$

100 * x = 360 * 30

X = 54

Ejercicios

Razón y Proporción

1. Si se requiere 6 naranjas para preparar dos litros de jugo. ¿Cuantas naranjas se requieren para preparar 8 litros de jugo?
2. Con $ 1.520 se puede comprar 1,5 kilos de miel. Si el precio baja $200 por kilo, ¿Cuántos kilos de miel puedo comprar con el nuevo precio?
3. Se debe administrar una dosis de 0,075 mg de un broncodilatador por cada 1,5 kg del peso del paciente. ¿Cuál es la dosis para una persona que tiene un peso de 60 kg?
4. Se requiere de 24 maestros pintores para pintar un edificio en 45 días. ¿Cuántos maestros se necesitan para realizar el mismo trabajo, pero en un tiempo de 20 días?
5. Si 18 m de género valen USD 21,60. ¿cuánto valen 24 m de género?
6. En un colegio se tienen 3.080 alumnos, 1.760 son varones. ¿Cuál es la razón entre el número de damas y de varones?

Porcentajes

1. ¿Cuál es el 35% de $ 90.000?
2. Una cartera vale $ 45.000, fue rebajada en un 15% ¿Cuál es el nuevo precio?
3. Si el 15% de un curso corresponde a 9 alumnos, ¿cuántos estudiantes tiene el curso?
4. En el cyberday hubo una oferta de un 20% de descuento por un pantalón y se canceló $9000 ¿Cuánto habría cancelado sin el descuento?
5. En una bodega hay una sección de tornillos. Si hay una existencia de 12.000 productos y debemos llegar a 15.000 de ellos. ¿Qué porcentaje falta?
6. En el conteo final de las elecciones para concejal de una comuna del norte de Chile, 3.000 personas votaron por Luis González, 3.200 votaron por Gladys Sepúlveda, por Ana María Campos votaron 12.500 y por José Camilo votaron .7500. ¿Qué porcentaje obtuvo Luis González del total de las votaciones?
7. ¿Qué cantidad se obtiene, al aumentar 12.800 en un 15 %?

Comentarios finales

Las razones y proporciones son de gran importancia en la vida diaria, sobre todo en las actividades comerciales de las empresas y de las personas. Una de ellas nos permite comparar precios y establecer una relación entre ellos. Otra nos permite determinar el beneficio de una tasa de interés al solicitar un crédito.

Referencias bibliográficas

Charles D. Miller, V. E. (2013). *Matemática: Razonamiento y Aplicaciones.* Mexico: Pearson.

Solucionario

Razón y Proporción

1) 24 naranjas
2) 1,72 kilos
3) 3 mg
4) 54 obreros
5) 28,80 dólares
6) 3:4

Porcentajes

1) 31.500
2) 38.250
3) 60
4) 11.250
5) 20%
6) 11,45%
7) 14.720

ENAC
FORMACIÓN TÉCNICA Caritas